

# ДВИЖЕНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ВЫДУВОМ РЕАКТИВНОЙ СТРУИ ВБЛИЗИ ПЛОСКОГО ЭКРАНА

М.И.Галютдинов, Д.В.Маклаков

НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева  
Казанского государственного университета  
420008, Казань, ул. Университетская, 17  
gmarat@ksu.ru, Dmitri.Maklakov@ksu.ru

Предлагается метод расчета аэродинамических характеристик крылового профиля, движущегося поступательно с постоянной скоростью вблизи плоского экрана. Через щель конечных размеров на верхней поверхности профиля производится выдув реактивной струи. Аналогично работе [1] применяется подход, основанный на введении фиктивного потока под экраном. Щель моделируется бесконечнолинейным круговым каналом. Используется модель идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ), плотности и полные давления выдуваемой струи и внешнего потока различны, вследствие чего на линиях схода потока возникает разрыв касательных составляющих скорости. Учет вязкости жидкости осуществляется в рамках модели пограничного слоя.

Поставленная задача сводится к системе нелинейных интегральных уравнений относительно углов наклона касательных к линиям раздела и скачков касательных составляющих скорости и решается итерационным методом. Проведена серия расчетов модифицированных профилей Жуковского со щелью при различных параметрах искривленности, толщины профиля, положениях щели, значениях импульса выдуваемой струи и отстояниях задней кромки профиля от экрана. Расчеты демонстрируют эффективность тангенциального выдува, особенно при наличии экрана.

**Постановка задачи.** Профиль  $L_0$  заданной формы движется поступательно в ИНЖ с постоянной скоростью вблизи прямолинейного плоского экрана (рис. 1). Пусть  $V_\infty$  – скорость обращенного движения жидкости на бесконечном удалении от профиля,  $h$  – отстояние его задней кромки  $B$  от экрана,  $b$  – хорда профиля,  $\alpha$  – угол атаки,  $\rho$  – плотность жидкости,  $p_\infty$  – давление на бесконечности.

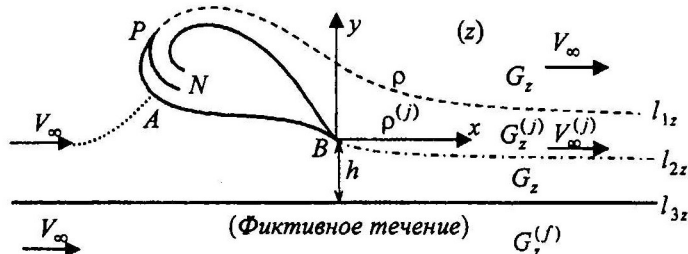


Рис. 1

На поверхности профиля имеется щель, асимптотически переходящая в бесконечнолистный круговой канал внутреннего радиуса  $R_s$  и толщины  $h_s$  (рис. 2). В случае равных скоростей стенки канала асимптотически стремятся к прямым и в расчетной схеме уходят на второй лист римановой поверхности. Из щели выдувается струя ИНЖ с плотностью  $\rho^{(j)}$  и скоростью  $V_\infty^{(j)}$  на бесконечности. Здесь и далее индексом  $(j)$  обозначаются параметры струи. В точках  $B$  и  $P$  схода потока внутренний к области течения угол принят равным  $2\pi$  (бесконечно-тонкие кромки).

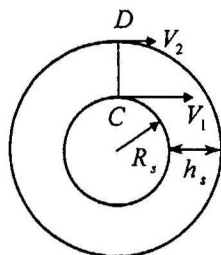


Рис. 2

Введем систему координат  $Ox$ , жестко связанную с  $L_0$ , направив ось абсцисс  $Ox$  по направлению скорости  $V_\infty$ . Обозначим через  $l_{1z}$  и  $l_{2z}$  линии тока, сходящиеся с острых кромок  $P$  и  $B$  профиля и разделяющие среды с плотностями  $\rho$  и  $\rho^{(j)}$ . При переходе через эти линии давление изменяется непрерывно, а скорость – скачкообразно. Под экраном введем фиктивный поток идеальной несжимаемой жидкости, движущийся равномерно со скоростью  $V_\infty$ . Прямую, моделирующую экран, обозначим через  $l_{3z}$ .

Из интеграла Бернулли найдём условия на линиях раздела  $l_{1z}$  и  $l_{2z}$ :

$$\gamma \frac{V^2}{V_\infty^2} - \frac{V^{(j)2}}{V_\infty^{(j)2}} = \gamma - 1, \quad (1)$$

где  $V$  и  $V^{(j)}$  – граничные значения скорости при подходе к линиям  $l_{1z}$  и  $l_{2z}$  из областей  $G_z$  и  $G_z^{(j)}$  соответственно, параметр  $\gamma$  – отношение скоростных напоров в потоках на бесконечности:

$$\gamma = \rho V_\infty^2 / (\rho^{(j)} V_\infty^{(j)2}).$$

Требуется найти форму линий раздела  $l_{1z}$  и  $l_{2z}$ , распределение скорости по поверхности профиля и его аэродинамические характеристики.

**Построение функции, осуществляющей конформное отображение внешности профиля со щелью на внешность круга.** Введём параметрическую плоскость  $(t)$  (рис. 3). Для взаимно однозначного конформного

отображения областей  $G_z$  и  $G_t$  предполагаем соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей  $(z)$  и  $(t)$ , а также переход точки  $z = 0$  в точку  $t = 1$ .

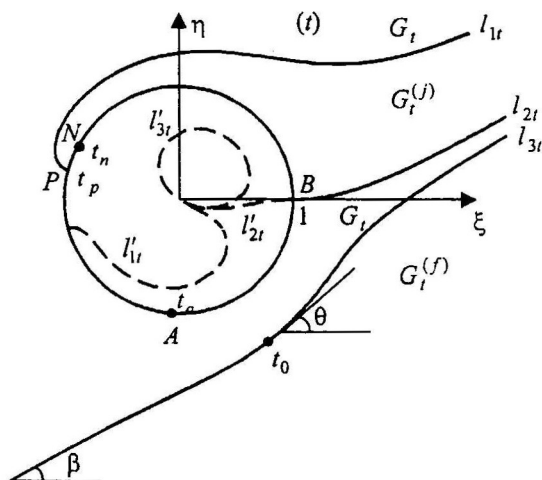


Рис. 3

Производную отображающей функции будем искать в виде

$$\frac{dz}{dt} = K \exp(-i\beta) \left(1 - \frac{1}{t}\right) \left(1 - \frac{t_p}{t}\right) \left(1 - \frac{t_n}{t}\right)^{\frac{a}{\pi}-1} \exp(-X_0(t)), \quad (2)$$

где  $K = \left| \frac{dz}{dt}(\infty) \right|$ ,  $X_0(t)$  – аналитическая во внешности круга функция, такая, что  $X_0(\infty) = 0$ ;  $t_p = \exp(i\gamma_p)$ ,  $t_n = \exp(i\gamma_n)$ ,  $a = \ln(V_1/V_2)$ .

Поскольку жидкость в канале циркулирует по закону вихря, то скорость распределена по закону  $V = \frac{A}{r}$ , где  $A$  – некоторая константа,  $r$  – расстояние от центра канала (рис. 2). Тогда параметр  $a$  запишется в виде  $a = \ln[R_s/(R_s + h_s)]$ .

Параметры  $\gamma_n, \gamma_p$  и  $a$  определяют положение, ширину щели и асимптотическую форму кольцевого канала. Параметры  $K$  и  $\beta$  выбираются так,

чтобы профиль имел заданную (единичную) хорду и был расположен под заданным углом атаки.

Вычислим ширину щели  $h_s$ , проинтегрировав функцию  $dz/dt$  по малой полуокружности в плоскости ( $t$ ) вокруг точки  $N$ :

$$h_s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{dt} dt \right|, \quad C_R: t = \rho \exp(i\varphi) + t_n; \quad \gamma_n - \pi/2 \leq \varphi \leq \gamma_n + \pi/2.$$

С помощью теории вычетов получим

$$h_s = \frac{8K\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \sin \frac{\gamma_p - \gamma_n}{2} \exp(-\operatorname{Re} X_0(t_n)).$$

Построение функции (2) для профиля заданной формы со щелью представляет собой самостоятельную задачу. В данной работе в качестве примера построен профиль со щелью путем модификации производной функции, конформно отображающей внешность профиля Жуковского на внешность круга.

Пусть функция

$$dz/dt = K_g \exp(-i\beta)(1 - 1/t) \exp(-X_g(t))$$

есть производная функции, отображающей внешность профиля Жуковского на внешность круга. Положим

$$X_0(t) = X_g(t) + \frac{a_s + ib_s}{t},$$

где  $a_s, b_s$  подбираются на основе выполнения условий однозначности отображающей функции  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$a_s = \cos \gamma_n - \cos \gamma_p + \frac{a}{\pi} \sin \gamma_n, \quad b_s = \sin \gamma_n - \sin \gamma_p - \frac{a}{\pi} \cos \gamma_n.$$

Тогда формула (2) задаёт функцию  $dz/dt$  для профиля со щелью, причем

$$h_s = \frac{8K_g\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \sin \frac{\gamma_p - \gamma_n}{2} \exp(-\operatorname{Re} X_g(t_n) - 1) \exp(\cos(\gamma_p - \gamma_n)).$$

Введём переменную  $\beta = \gamma_p - \gamma_n$  и обозначение

$$d = \frac{8K_g\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{a}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \exp(-\operatorname{Re} X_g(t_n) - 1).$$

Тогда получим уравнение относительно  $\beta$ :

$$\frac{h_s}{d} = \sin \frac{\beta}{2} \exp(\cos \beta).$$

Решив его, найдем  $\gamma_p = \gamma_n + \beta$ .

Таким образом, задав ширину щели и положение  $\gamma_n$  точки  $N$  в параметрической плоскости, путём модификации профиля Жуковского мы можем построить профиль со щелью мало отличающийся от исходного. Покажем на примере (рис. 4) сравнение модифицированного профиля ( $h_s = 0.01$ ,  $R_s = 0.05$ ,  $\gamma_n = 180^\circ$ ) с профилем Жуковского (штриховая линия) с параметрами  $H = 0.2$ ,  $D = 0.15$ , где  $H$  – параметр, отвечающий за кривизну профиля, а  $D$  – за его толщину (см. [2]).



Рис. 4

Отметим, что описанная процедура модификации является общей и её можно осуществить не только для профиля Жуковского, но и для произвольного замкнутого профиля.

**Вывод интегральных уравнений.** При сделанных предположениях во внешнем потоке и в струе существуют комплексные потенциалы. Мы будем их рассматривать как единую кусочно-аналитическую функцию  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , терпящую разрыв на линиях раздела  $l_{1z}$ ,  $l_{2z}$  и  $l_{3z}$ . Комплексно-сопряженная скорость в плоскости ( $t$ ) может быть представлена в виде ([3], гл. 4)

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} K V_\infty, & t \in G_t \\ K V_\infty^{(j)}, & t \in G_t^{(j)} \end{cases} \exp(-i\beta) f_0(t) \exp(-X(t)), \quad (3)$$

где

$$f_0(t) = \left(1 - \frac{t_a}{t}\right) \left(1 - \frac{1}{t}\right) \left(1 - \frac{t_p}{t}\right) \left(1 - \frac{t_n}{t}\right)^{-1}, \quad t_a = \exp(i\gamma_a).$$

Пусть  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$  и  $l_{3t}$  – линии, соответствующие линиям раздела  $l_{1z}$ ,  $l_{2z}$  и  $l_{3z}$  в параметрической плоскости, а  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  – дуговые абсциссы линий

$l_{1t}$ ,  $l_{2t}$  и  $l_{3t}$ , отсчитываемые от точек  $t_p$ ,  $t_n$  и  $t_0$  соответственно (где  $t_0$  — образ точки  $-ih$  в параметрической области ( $t$ )). Будем искать углы наклона касательных  $\theta_1(s_1)$ ,  $\theta_2(s_2)$  кривых  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$ . Тогда

$$u_1(s_1) = t_p + \int_0^{s_1} \exp(i\theta_1(\xi)) d\xi \text{ для } l_{1t}, u_2(s_2) = 1 + \int_0^{s_2} \exp(i\theta_2(\xi)) d\xi \text{ для } l_{2t}.$$

Для экрана углы наклона касательных  $\theta_3(s_3)$  известны. Запишем

$$u_3(s_3) = t_0 + \int_0^{s_3} \exp(i\theta_3(\xi)) d\xi, \text{ для } l_{3t}.$$

Отметим, что определив  $X(t)$ , мы найдем и линии раздела  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$ .

В формуле (3) неизвестными являются  $X(t)$  и  $\gamma_a$ . Запишем краевые условия для их определения.

Из (2), (3) и соотношения

$$\frac{dw}{dz}(\infty) = \begin{cases} V_\infty, & t \in G_z \\ V_\infty^{(j)}, & t \in G_z^{(j)} \end{cases}$$

получим условие на бесконечности для  $X(t)$ :

$$X(\infty) = 0. \quad (4)$$

Кинематические соотношения на линиях раздела  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$  выведем из условия, что  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$  — линии тока, следовательно, при переходе через них аргумент комплексно-сопряженной скорости  $\theta_k(s_k) = -\arg dw/dt$ ,  $k=1, 2$ , не терпит скачка. Отсюда

$$\operatorname{Im}[X(u_k(s_k)) - X^{(j)}(u_k(s_k))] = 0, \quad k=1, 2, \quad (5)$$

$$\theta_k(s_k) = \beta - \operatorname{Im}[\ln f_0(u_k(s_k))] + \operatorname{Im}[X(u_k(s_k))], \quad k=1, 2. \quad (6)$$

Динамические условия непрерывности давления на линиях раздела  $l_{1t}$ ,  $l_{2t}$  получим из интеграла Бернулли, разрешив уравнение (1) относительно  $\exp(\lambda_k(s_k))$ , где  $\lambda_k(s_k) = X(u_k(s_k)) - X^{(j)}(u_k(s_k))$ ,  $k=1, 2$ :

$$\lambda_k(s_k) = \ln \left[ \frac{1-\gamma}{2} T + \sqrt{\left( \frac{1-\gamma}{2} T \right)^2 + \gamma} \right], \quad k=1, 2,$$

где

$$T = \left| \frac{dz/dt(u_k(s_k))}{k f_0(u_k(s_k))} \right|^2 \exp(X(u_k(s_k)) + X^{(j)}(u_k(s_k))). \quad (7)$$

Кинематическое соотношения на единичной окружности следует из условия непроницаемости контура профиля:

$$\operatorname{Im} X(e^{i\gamma}) = \delta = \text{const}, \quad \gamma_a = 2\delta - \gamma_p + \gamma_n + 2\beta + \pi. \quad (8)$$

Кинематическое соотношения на экране  $l_{3r}$  получим из условия  $V = V_\infty$  постоянства скорости под экраном:

$$\begin{aligned} \lambda_3(s_3) &= X(u_3(s_3)) - X^{(f)}(u_3(s_3)) = \\ &= 2 \ln \left| \frac{dz/dt(u_3(s_3))}{k f_0(u_3(s_3))} \right| + \operatorname{Re} [X(u_3(s_3)) + X^{(f)}(u_3(s_3))], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $X(u)$  и  $X^{(f)}(u)$  – граничные значения функции  $X(u)$  при подходе к экрану из областей  $G_l$  и  $G_l^{(f)}$  соответственно.

Если предположить, что  $\lambda_1(s_1), \lambda_2(s_2), \lambda_3(s_3), \theta_1(s_1), \theta_2(s_2)$  известны, то функцию  $X(t)$  можно восстановить по условиям (4), (7), (8), (9) (см. [4]):

$$X(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t) + \Phi_3(t), \quad (10)$$

где  $\Phi_k(t) = G_k(t) + \overline{G_k(1/\bar{t})} - \overline{G_k(0)}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Тогда

$$\delta = \operatorname{Im}(G_1(0) - G_2(0) + G_3(0)).$$

**Функции**

$$G_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{kt}} \frac{\lambda_k(u_k) du}{u_k - t}, \quad k = \overline{1, 3}$$

есть интегралы типа Коши по контурам  $l_{1r}, l_{2r}, l_{3r}$  с плотностями  $\lambda_1(u_1), \lambda_2(u_2), \lambda_3(u_3)$ , а черта означает комплексное сопряжение.

Функция  $X(t)$  в виде (10) по построению удовлетворяет условию на бесконечности (4), условиям сопряжения (5) и условию непроницаемости контура профиля (8). Входящие в (10) функции  $G_k(t)$  обеспечивают скачок скорости при переходе через  $l_{1r}, l_{2r}, l_{3r}$ , функции  $\overline{G_k(1/\bar{t})}$  обеспечивают выполнение условия непроницаемости контура профиля (8); постоянные  $\overline{G_k(0)}$  обеспечивают выполнение условия на бесконечности (4).

Задача нахождения функции  $X(t)$  сводится к нахождению функций  $G_k(t)$ . Для определения шести неизвестных  $\lambda_1(s_1)$ ,  $\lambda_2(s_2)$ ,  $\lambda_3(s_3)$ ,  $\theta_1(s_1)$ ,  $\theta_2(s_2)$  и  $\gamma_a$  система уравнений (6) – (9) решалась методом прямых итераций. Интегралы типа Коши  $G_k(t)$  вычислялись методом комплексных граничных элементов [5].

**Результаты численных расчетов.** Алгоритм расчета был реализован в виде программы на языке Фортран 90. Проведены расчеты модифицированных профилей Жуковского при различных параметрах искривленности профиля, значениях импульса выдуваемой струи  $C_I$ , углах атаки  $\alpha$  и отстояниях задней кромки профиля от экрана  $h$ . После расчета потенциального обтекания профиля производился приближенный учет вязкости жидкости в рамках модели пограничного слоя (ПС) методом Эпплера (см. [6]) для числа Рейнольдса  $Re_\infty = 10^6$ , где  $Re_\infty = V_\infty b / \nu$  ( $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости). При этом начальная точка расчета ПС на верхней стороне профиля выбиралась внутри щели в сечении, расположенном на расстоянии  $2h_s$  от точки  $P$ .

На рис. 5 а, б изображены картины обтекания профиля, изображенного на рис. 4, потоком ИНЖ для случаев безграничного потока (а) (см. [7]) и наличия плоского экрана (б) при  $h = 0.5 b$ .

При одинаковой силе выдува  $C_I = 0.3$  и одинаковом довольно большом угле атаки  $\alpha = 25^\circ$  для обоих случаев характер обтекания профиля является безотрывным, экранный эффект (отношение  $C_y / C_y^\infty$ , где  $C_y$  – коэффициент подъемной силы,  $C_y^\infty$  – значение  $C_y$  при  $h \rightarrow \infty$ ) равен 1.45.

Построим графики зависимостей экранного эффекта от отстояния задней кромки от экрана  $h$ , отнесенного к хорде  $b$  профиля. Для расчета возьмем профили, изображенные на рис. 4. Расчет замкнутого профиля (а) осуществим по методу [1]. Для изображенных графиков характер обтекания профиля – безотрывный.



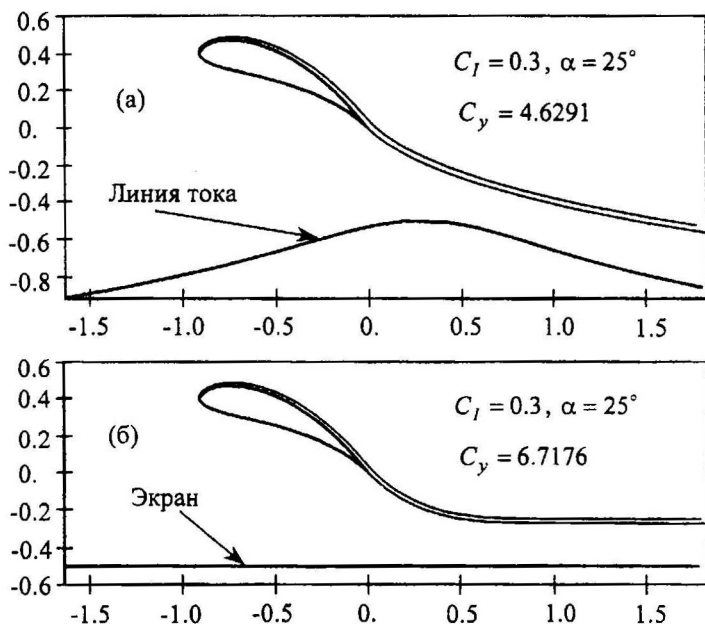


Рис. 5 а, б

На следующем примере (рис. 6 а, б) покажем влияние выдува реактивной струи на величину экранного эффекта.

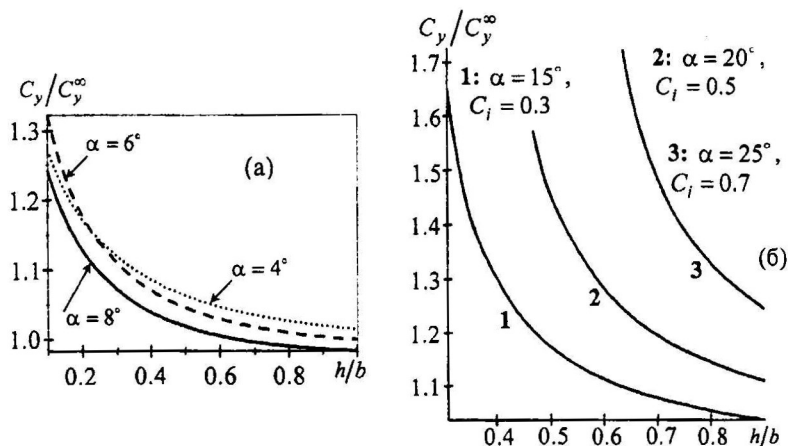


Рис. 6 а, б

На основании приведенных результатов расчета можно сделать следующие выводы:

- 1) при выдуве реактивной струи на верхнюю поверхность профиля возможно его безотрывное обтекание даже при больших углах атаки;
- 2) при наличии выдува максимальный экраный эффект увеличился с  $1.2 \div 1.3$  до  $1.6 \div 1.7$ , причем он начинает проявляться при больших отстояниях от экрана, что положительно влияет на безопасность полета экраноплана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-00173), программы "Университеты России".

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галяутдинов М.И., Маклаков Д.В. *Движение крылового профиля вблизи плоского экрана* // Известия вузов. Авиационная техника. – 1999. – № 4. – С. 40–43.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
3. Маклаков Д.В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами*. – М.: Янус-К, 1997. – 280 с.
4. Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
5. Громадка Т., Лей Ч. *Комплексный метод граничных элементов*. – М.: Мир, 1990.
6. Eppler R. *Airfoil design and data*. Berlin, Heidelberg: Springer -Verlag, 1990. – 561 p.
7. Галяутдинов М.И., Маклаков Д.В. *Движение крылового профиля с выдувом реактивной струи* // Известия вузов. Авиационная техника. – 2000. – № 3. – С. 20–22.